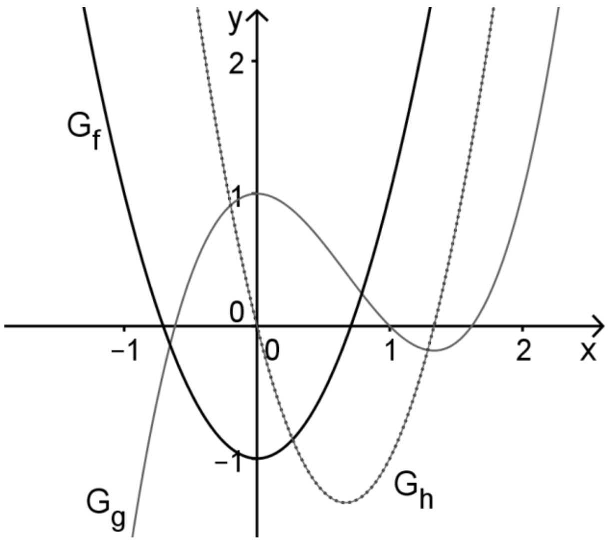
Analysis

1. Im nebenstehenden Bild sind die Graphen dreier Funktionen *f*, *g* und *h* dargestellt.

   Geben Sie an, bei welcher der drei Funktionen es sich um eine Stammfunktion von einer der beiden anderen Funktionen handelt und begründen Sie Ihre Entscheidung.

   [3 BE]



2. Geben Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion 3. Grades an, die nur die beiden Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = -4$ hat.

   [2 BE]

3. Die Tangente an den Graphen der Funktion *f* mit $f(x) = \sqrt{2x+1} - x$ im Punkt $P(0\,|\,f(0))$ schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = -x + 3$ im Punkt *S*.

   Ermitteln Sie die Koordinaten von *S.* [5 BE]

4. Die Fläche, die der Graph der Funktion *h* mit der Gleichung $h(x) = 2e^x$ mit den beiden Koordinatenachsen und der Geraden mit der Gleichung $x = \frac{1}{2}\ln 5$ einschließt, erzeugt bei Rotation um die *x*-Achse einen Körper.
   Prüfen Sie rechnerisch, ob das Volumen dieses Körpers größer als 20 VE ist. [5 BE]

5. Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = -x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2$.

   a) Ermitteln Sie alle Stammfunktionen von *f* . [1 BE]

   b) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion *f* auf Extrempunkte. [5 BE]

6. Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = -6x^2 + 12x + 18$.
   Ihr Graph ist *K*.

   a) Ermitteln Sie die Größe der Fläche, die von *K* und den Koordinatenachsen im Intervall $[0;1]$ vollständig eingeschlossen wird. [4 BE]

   b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an *K* im Punkt $P(-1\,|\,f(-1))$. [5 BE]

7. Die Funktion *f* ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades.

   Geben Sie eine mögliche Gleichung für *f* an, sodass die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt sind:
   I $f(-1) = 0$
   II $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ [3 BE]

8. Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = -e^{-x+1}$.
   Der Graph dieser Funktion schneidet die *y*-Achse im Punkt S_y.

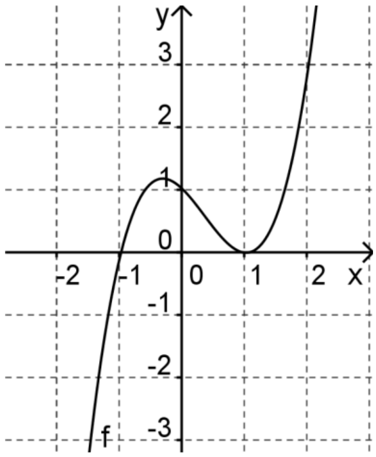
   a) Geben Sie die Koordinaten von S_y an. [1 BE]

   b) Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das die Tangente an den Graphen dieser Funktion im Punkt S_y mit den beiden Koordinatenachsen begrenzt. [5 BE]

9. Im Bild ist der Graph einer Funktion *f* dargestellt.

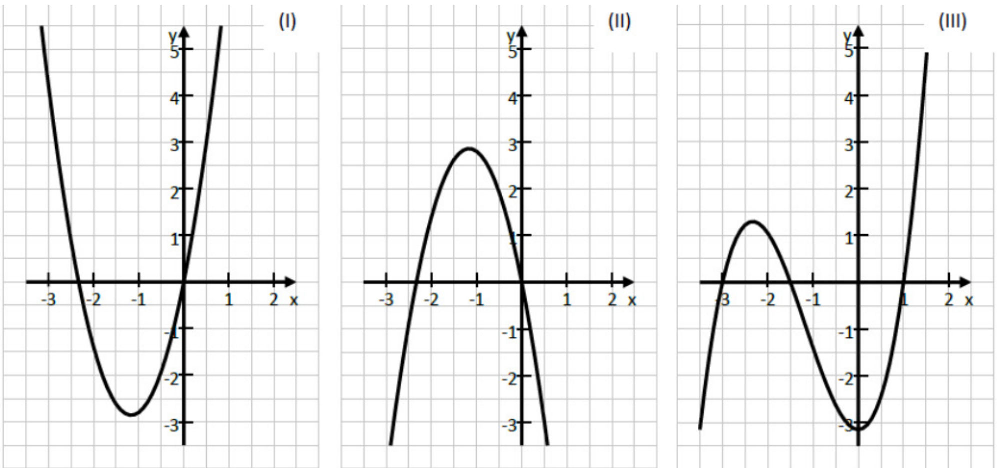
   a) Geben Sie mithilfe der Darstellung einen Näherungswert für $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ an. [1 BE]

   b) Beschreiben Sie den Körper, dessen Volumen sich mit der Gleichung $V = \pi \cdot \int_{1}^{2} (f(x))^2 dx$ berechnen lässt. [2 BE]



10. Ermitteln Sie eine Gleichung für diejenige Stammfunktion von *f* mit $f(x) = 3\sqrt{2x+5}$, die durch den Punkt $P(-2\,|\,4)$ verläuft. [3 BE]

11. Dargestellt sind die Graphen einer ganzrationalen Funktion *f*, der zugehörigen Ableitungsfunktion f' und einer weiteren Funktion *g*.



Entscheiden Sie, welches die Graphen der Funktionen *f* und f' sind.
Begründen Sie Ihre Entscheidung. [3 BE]

12. Im Punkt $Q(3\,|\,0)$ wird eine Tangente an den Graphen der Funktion *f* mit $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$ gelegt.

    Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Tangente. [4 BE]

13. Gegeben ist eine Funktion *f* mit $f(3) = 0$, $f'(3) = 0$ und $f''(3) = 2$.

    Formulieren Sie zwei Eigenschaften der Funktion *f*, die aus den gegebenen Angaben geschlussfolgert werden können. [2 BE]

14. Ermitteln Sie eine Gleichung einer ganzrationalen Funktion 3. Grades, deren Graph den Wendepunkt $W(1\,|\,2)$ hat. [4 BE]

15. Bestimmen Sie diejenige reelle Zahl *a*, die die folgende Gleichung erfüllt:

    $\int_0^{-\ln\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2}e^{-x}\right) dx = a + 3$ [3 BE]

Analytische Geometrie

1. Ermitteln Sie die Koordinaten eines Punktes *C*, der vom Punkt $A(-2\,|\,1\,|\,4)$ genauso weit entfernt ist, wie der Punkt $B(-3\,|\,-2\,|\,7)$. [3 BE]

2. Gegeben sind der Punkt $P(2\,|\,-1\,|\,3)$ und die Punkteschar $Q_s(s+2\,|\,-3\,|\,2s-1)$; $s \in I\!R$.
   Für genau eine reelle Zahl *s* schneiden die beiden Ursprungsgeraden durch *P* und Q_s einander unter einem rechten Winkel.
   Bestimmen Sie diese reelle Zahl *s.* [3 BE]

3. Die Punkte $U(1\,|\,1\,|\,1)$, $V(-2\,|\,4\,|\,2)$ und $W(0\,|\,-1\,|\,3)$ sind Eckpunkte des Dreiecks *UVW*.
   a) Geben Sie eine Gleichung für die Gerade *g* an, die parallel zur Seite *UV* dieses Dreiecks durch den Eckpunkt *W* verläuft. [2 BE]
   b) Ermitteln Sie eine Gleichung für diejenige Gerade *h*, die in derselben Ebene liegt wie das Dreieck *UVW* und zu der die Seite *UV* und die Gerade *g* den gleichen Abstand haben. [3 BE]

4. Die Punkte $E(2\,|\,-2\,|\,0)$ und $G(8\,|\,-1\,|\,3)$ sind Anfangs- und Endpunkt der längeren der beiden Diagonalen eines Drachenvierecks *EFGH*.
   Die andere Diagonale schneidet *EG* von *E* aus im Verhältnis 1:2 und hat eine Länge von 4 LE.

   Geben Sie eine Gleichung an, mit der man den Ortsvektor eines möglichen Punktes *F* bestimmen kann. [4 BE]

5. Gegeben sind die Punkte $A(1\,|\,2\,|\,0)$, $B(1\,|\,6\,|\,0)$ und $C_t(t-2\,|\,t+7\,|\,0)$ mit $t \in I\!R$ und $t \neq 0$. Sie sind drei der vier Eckpunkte der viereckigen Grundfläche ABC_tD einer Pyramide.
   Der Punkt *S* ist die Spitze der Pyramide. Die Höhe *h* beträgt 7 LE.
   a) Bestimmen Sie denjenigen Wert von *t*, für den die Grundfläche ein Quadrat ist. [6 BE]
   b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes *D* der quadratischen Grundfläche. [2 BE]
   c) Zwei der möglichen Spitzen *S* liegen auf der Geraden mit der Gleichung

   $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};\ r \in I\!R.$$

   Ermitteln Sie deren Koordinaten. [3 BE]

6. Gegeben sind die Punkte $A(-1|1|4)$, $B(-3|5|6)$ und $C_t(-2+t|3|5+t)$ mit $t \in IR$ und $t \neq 0$.

   a) Zeigen Sie, dass jedes Dreieck ABC_t gleichschenklig ist. [3 BE]

   b) Bestimmen Sie diejenigen Werte von t, für die das jeweils zugehörige Dreieck ABC_t gleichseitig ist. [4 BE]

7. Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und

   $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -a \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2a+3 \\ 2 \\ 2+a \end{pmatrix}$ mit $t, s, a \in IR$.

   Untersuchen Sie, ob es eine reelle Zahl a gibt, sodass die Geraden g und h_a parallel verlaufen. [2 BE]

8. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b_c} = \begin{pmatrix} 4 \\ c \\ -1 \end{pmatrix}$; $c \in IR$.

   a) Bestimmen Sie c so, dass gilt: $\left|\overrightarrow{b_c}\right| = \sqrt{21}$. [3 BE]

   b) Prüfen Sie, ob in diesem Fall die Vektoren $\vec{a}$ und $\overrightarrow{b_c}$ kollinear sind. [2 BE]

9. Die Punkte $A(3|4|1)$, $B(6|3|2)$, $C(3|0|3)$ und $D(0|1|2)$ sind die Eckpunkte eines ebenen Vierecks $ABCD$.

   Weisen Sie nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist. [3 BE]

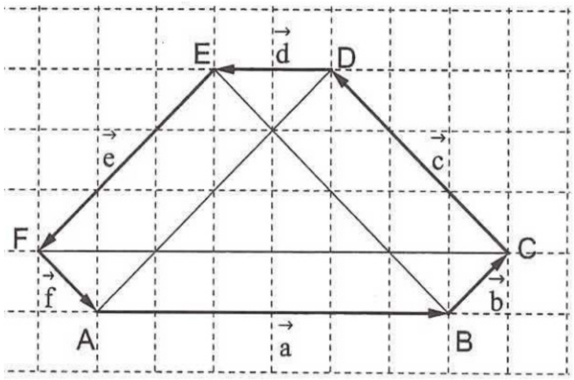
10. Zwei Geraden g und h haben die Richtungsvektoren

    $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a \\ a+5 \\ -a+2 \end{pmatrix}$; $a \in IR$.

    Geben Sie unter Verwendung eines konkreten Wertes für den Parameter a mögliche Gleichungen von g und h für den Fall an, dass g und h einander orthogonal schneiden. [4 BE]

11. Bestimmen Sie einen Wert k so, dass der Punkt $P_k(3|k^2|k)$ in der Ebene liegt, die durch die Punkte $A(1|2|4)$, $B(0|1|5)$ und $C(0|0|4)$ eindeutig festgelegt wird. [5 BE]

12. Im dargestellten Sechseck *ABCDEF* sind je drei Strecken (Seiten bzw. Diagonalen) parallel.
    Geben Sie für den Vektor $\vec{x}$ mit $\vec{x} = \vec{f} - \vec{e} - \vec{c}$ einen Repräsentanten an.
    [1 BE]



13. Gegeben sind die Geraden
    $$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};\ r \in I\!R \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};\ s \in I\!R.$$
    a) Begründen Sie, dass die beiden Geraden einander schneiden und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S an. [2 BE]
    b) Ermitteln Sie die Koordinaten eines Punktes *P*, der auf einer der beiden Winkelhalbierenden dieser beiden Geraden liegt. [4 BE]

14. Der Punkt $M(1|1|1)$ ist Mittelpunkt eines Kreises *k*, auf dem die Punkte $P(3|3|2)$ und $Q(-1|0|3)$ liegen.
    a) Prüfen Sie, ob $\overline{PQ}$ ein Durchmesser dieses Kreises ist. [3 BE]
    b) Geben Sie eine Gleichung der Ebene *E* an, in der dieser Kreis liegt. [2 BE]
    c) Ermitteln Sie die Koordinaten eines weiteren Kreispunktes *R.* [2 BE]

15. Gegeben ist die Ebene $H:\ 2x - 2y + z = -2$.
    Ermitteln Sie die Gleichung einer zu *H* parallelen Ebene *F* so, dass der Punkt $T(-4|5|1)$ zu *H* und *F* den gleichen Abstand besitzt. [4 BE]

Stochastik

1. Eine verbeulte Münze wird mehrfach geworfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Wurf „Wappen" fällt, beträgt p.

   a) Geben Sie jeweils einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse A und B an:

   A: Bei fünf Würfen fällt genau dreimal „Wappen".

   B: Bei fünf Würfen fällt genau dreimal „Wappen", darunter bei den ersten beiden Würfen zweimal. [2 BE]

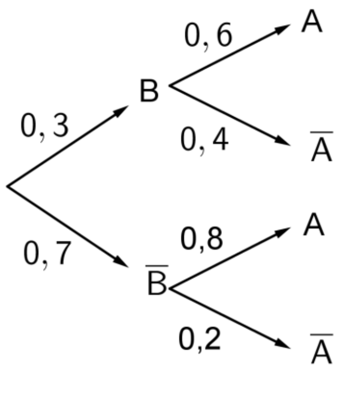
   b) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei drei Würfen dreimal „Wappen" fällt, ist 0,216.

   Untersuchen Sie, ob das Ergebnis „Wappen" wahrscheinlicher ist als das Ergebnis „Zahl". [3 BE]

2. Hamster sind beliebte Haustiere. Bevor sie zum Verkauf in die Tierhandlung gebracht werden, muss der Gesundheitszustand aller Hamster überprüft werden.
   Von Hamstern, die aus einer großen Züchterei kommen, ist aus langjähriger Erfahrung bekannt, dass 20 % der Hamster an der Krankheit A leiden.
   Es werden 40 Hamster zufällig ausgewählt und untersucht.

   Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "Es leiden genau acht dieser Hamster an der Krankheit A" berechnet werden kann. [2 BE]

3. Für ein zweistufiges Zufallsexperiment hat ein Schüler das abgebildete Baumdiagramm korrekt gezeichnet und beschriftet.



   a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{A})$. [2 BE]

   b) Erstellen Sie zum selben Sachverhalt eine entsprechende Vierfeldertafel. [3 BE]

4. Eine Befüllungsanlage füllt Mehl in die entsprechenden Tüten. Wenn die Masse um mehr oder weniger als 10 Gramm von dem vorgesehenen Kilogramm Mehl abweicht, zählt sie als nicht normgerecht.
   Man hat festgestellt, dass fünf Prozent der abgefüllten Tüten nicht normgerecht sind.
   Ein Bäckermeister hat 200 Tüten Mehl erhalten.
   Die Zufallsvariable X gibt an, wie viele der 200 Mehltüten eine Abweichung von mehr oder weniger als 10 Gramm aufweisen.

   Ein Schüler hat als Ansatz für eine Berechnung folgende Gleichung notiert.

$$P(A) = 1 - \binom{200}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{200} - \binom{200}{1} \cdot 0{,}05^1 \cdot 0{,}95^{199} - \binom{200}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{198}$$

$$- \binom{200}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{197} - \binom{200}{4} \cdot 0{,}05^4 \cdot 0{,}95^{196}$$

   a) Beschreiben Sie ein Ereignis *A*, zu dem die Rechnung des Schülers passt. [2 BE]

   b) Ersetzen Sie das *A* (für Ereignis *A*) in $P(A)$ durch einen Term unter Verwendung der Zufallsvariable X. [1 BE]

5. Ein regulärer (fairer) Würfel wird zweimal nacheinander geworfen und die Augenzahlen werden notiert.

   Geben Sie zwei verschiedene Ereignisse *A* und *B* an, die genauso wahrscheinlich sind wie das Ereignis C: "Es wird beim ersten Wurf eine gerade Zahl und beim zweiten Wurf eine ungerade Zahl geworfen."

   Begründen Sie Ihre gewählten Ereignisse. [4 BE]

6. Bei einem Glücksrad gibt es nur zwei unterschiedlich große Sektoren.
   Für 10 Cent darf man einmal drehen und gewinnt bei "gelb" einen Euro.
   Erdreht man "schwarz" hat man verloren und geht leer aus.

   Ermitteln Sie, in welchem Verhältnis der gelbe und schwarze Sektor bei diesem Glücksrad stehen müssen, wenn das Spiel fair sein soll, d.h., wenn der Betreiber des Glücksrads damit auf lange Sicht weder Gewinn noch Verlust machen wird. [3 BE]

7. Eine 11. Klasse hat sich an einem landesweiten Projekt in "Politischer Bildung" beteiligt und dabei einen der drei ausgelobten Preise gewonnen. Drei Schüler bzw. Schülerinnen sollen an der Auszeichnungsveranstaltung teilnehmen und per Losentscheid unter den 12 Mädchen und 13 Jungen ausgewählt werden.

   Geben Sie einen Term an, mit dem man die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen kann, dass sich unter den drei "Ausgelosten" genau zwei Jungen befinden. [2 BE]