

Begriffe:

- Stammfunktion
- bestimmtes und unbestimmtes Integral
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- lineare Substitution
- partielle Integration (Produktintegration)
- orientierte Flächeninhalte

Integrale werden benötigt für:

- Berechnung von Flächen unter einer Kurve
- die eingeschlossene Fläche zwischen mehreren Kurven
- Volumenberechnungen von Rotationskörpern
- Rekonstruktion eines Bestandes aus Änderungsraten
- Berechnung physikalischer Größen
 - Weg – Integration der Geschwindigkeit nach der Zeit
 - Arbeit – Integration der Kraft nach dem Weg
 - elektrische Ladung – Integration des elektrischen Stromes nach der Zeit

Dabei können Gleichungen unterschiedlicher Art auftreten:

- ganzrationale Funktionen
- Wurzel-, Logarithmusfunktionen
- e-Funktionen
- verkettete Funktionen
- Winkelfunktionen

Aufgaben

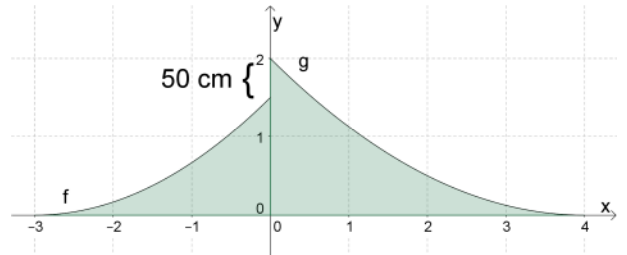
1. Bilde eine Stammfunktion

- $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$
- $f(x) = 3e^x + 4x$
- $f(x) = -2\cos(-2x + 3)$
- $f(x) = (-2\cos x)(-2x + 3)$
- $f(x) = \sqrt{2x}$
- $f(x) = 6e^{3x-1}$
- $f(x) = x\sin x$
- $f(x) = xe^x$
- $f(x) = x\ln x$
- $f(x) = \sin^2 x$

2. Berechne

- $\int_{-1}^0 (2x + 3)^4 dx$
- $\int_1^3 e^{\frac{2}{3}x-4} dx$
- $\int_0^{\pi} \sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) dx$
- $\int_{-3}^0 x^2 e^x dx$
- $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$

3. Das Profil einer **Skateboardrampe** wird von zwei quadratischen Parabeln f und g gebildet, die über einen senkrechten Absatz verbunden sind.
- Wie lauten die Gleichungen für f und g ?
 - Welche Querschnittsfläche hat die Rampe?
 - Die Rampe hat eine Breite von 6 m. Wie viel wiegt der Beton für den Bau der Rampe?
(Dichte von Beton: $2,3 \text{ g/cm}^3$)



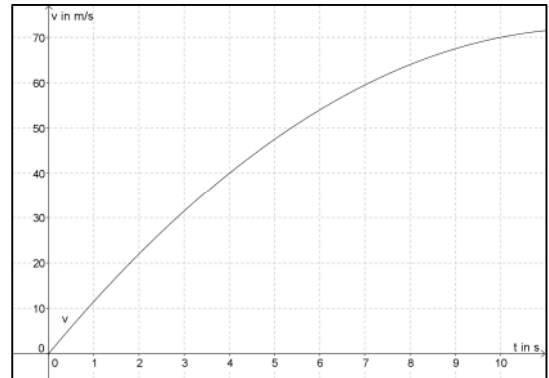
4. Rekonstruktion von Beständen

Testfahrt

Der Fahrtenschreiber zeichnet bei einer Testfahrt eines Sportwagens die Geschwindigkeit v auf. Sie kann durch die Funktion $v(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 12t$ beschrieben werden (t in s, v in $\frac{m}{s}$).

- Wie lautet die Weg-Zeit-Funktion des Fahrvorgangs?
- Welche Strecke hat das Fahrzeug insgesamt zurückgelegt?

(Hinweis: Es ist der Weg gesucht, den das Fahrzeug vom Losfahren bis zum Halten zurückgelegt hat)



5. **Besucherkahl**

Auf einem Volksfest wird die Änderungsrate der Besucherzahl kontinuierlich festgestellt. Es zeigt sich, dass sie durch $B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t$ erfasst wird (t in Std., B' in Besucher/Std.). Nach einer Stunde waren 500 Menschen auf dem Fest.

- Wie lautet die Gleichung der Funktion $B(t)$ für die Besucherzahl?
- Wie viele Besucher sind nach 3 Std. anwesend?
- Wie groß ist die maximale Besucherzahl?
- Wann steigt die Besucherzahl am schnellsten?
- In welchen Zeitgrenzen kann das Modell höchstens gelten?

6. **Tomatenpflanze**

Ein Tomatensetzling besitzt beim Einpflanzen eine Höhe von 5 cm. Seine Höhe nimmt mit der Geschwindigkeit $v(t) = -0,1t^3 + t^2$ zu (t in Wochen, v in $\frac{cm}{Woche}$).

rekonstruieren Sie die Funktion h , die die Höhe der Pflanze erfasst.

Klären Sie folgende Fragen:

- Wie lange dauert die Wachstumsphase?
- Wie hoch wird die Pflanze maximal?
- Wie hoch wird die Pflanze zum Zeitpunkt des schnellsten Wachstums sein?

7. Für das Wachstum einer Hopfenpflanze wird folgende Modellannahme getroffen: die Wachstumsgeschwindigkeit $w(t)$ (in cm/Tag) steigt innerhalb von 40 Tagen linear von 0 auf 25. Anschließend nimmt die Wachstumsgeschwindigkeit linear innerhalb von 30 Tagen wieder auf 0 ab.

Um wie viel wächst die Pflanze insgesamt.

<http://matheplanet.com/default3.html?call=viewtopic.php?topic=71967&ref=https%3A%2F%2Fwww.google.de%2F>

8. Die Höhe einer wachsenden Pflanze wird näherungsweise beschrieben durch:

$$h(t) = -\frac{1}{20}(25 + 16t)e^{-0,64t} + 1,4 \quad t \geq 0$$

Die Zeit t wird ab dem Einpflanzen in Monaten gemessen, die Höhe wird in Metern angegeben.

- a) Wie hoch war die Pflanze beim Einpflanzen?
b) Zeigen Sie, dass für die Höhenzuwachsrate der Pflanze Folgendes gilt:

$$g(t) = 0,512 \cdot t \cdot e^{-0,64t}$$

Begründen Sie Ihr Vorgehen in Bezug auf den Sachzusammenhang.

- c) Begründen Sie kurz auf mathematischer Ebene: Die Höhe der Pflanze ist monoton zunehmend.

Geben Sie die theoretische Maximalhöhe der Pflanze an. Begründen Sie Ihre Rechnung unter Zurückführung auf die Grenzwertregeln.

- d) Untersuchen Sie nach geeigneter Kurvendiskussion die Höhenzuwachsrate anhand folgender Kriterien:

- i) Für welchen Zeitpunkt ist die Höhenzuwachsrate extremal?
ii) Handelt es sich um ein Maximum oder Minimum?
iii) Wie hoch ist die extremale Höhenzuwachsrate? Welche absolute Höhe hat die Pflanze zu diesem Zeitpunkt?