Ableitungen werden benötigt für:

- Aufstellen von Tangentengleichungen
- Kurvendiskussionen, Extremstellen, Wendestellen
- Optimierungsprobleme, Extremwertaufgaben
- Volumenberechnungen von Rotationskörpern
- Änderungsraten
- Änderung des Weges nach der Zeit → Geschwindigkeit
- Änderung der Geschwindigkeit nach der Zeit → Beschleunigung
- Wachstumsprozesse (momentane Wachstumsrate)

Dabei können Gleichungen unterschiedlicher Art auftreten:

- ganzrationale Funktionen
- Wurzel-, Logarithmusfunktionen
- e-Funktionen
- verkettete Funktionen
- Winkelfunktionen

Aufgaben

1. Bilde die ersten drei Ableitungen
   a) $f(x) = 2x^3 – 3x^2 + 4x – 1$
   b) $f(x) = (3x – 6)^2 + 2x$
   c) $f(x) = 3e^x - 6e^{2x}$
   d) $f(x) = 7e^{3-2x}$
   e) $f(x) = (x – 1)e^{2x+1}$

2. Leite ab.
   a) $f(x) = 2x^2(3x – 6)^4$
   b) $f(x) = (2x – 4)^2\ e^{3x}$
   c) $f(x) = \ln(3x – 4)$
   d) $f(x) = x^2\ln(2x)$
   e) $f(x) = \sin 3x$
   f) $f(x) = \cos(3 - 2x)$
   g) $f(x) = \sin(1 + 4x)$
   h) $f(x) = \sqrt{5x}$
   i) $f(x) = x\ e^{2-x}$
   j) $f_a(x) = 4x\ e^{a-2x}$, $a > 0$
   k) $f_t(x) = \sqrt{3tx}$, $t > 0$
   l) $f_a(x) = ax^2 \sin(3 – ax)$; $a > 0$

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$
   a) Führe eine vollständige Kurvenuntersuchung durch. (Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Verhalten im Unendlichen, Extrempunkte, Wendepunkte, Symmetrie, graphische Darstellung)
   b) Ein Streckenabschnitt einer Achterbahn kann mit der Funktion f beschrieben werden (Dabei gilt: $-4 \leq x \leq 2$ und 1 LE = 10 m).
      Wie hoch ist die Bahn an ihrem höchsten Punkt?
      An welcher Stelle hat die Bahn ihre größte Steigung?
      Wie groß ist an dieser Stelle der Steigungswinkel?
      An welcher Stelle hat die Gerade der Normalkraft den Anstieg 1?

4. Ermitteln Sie eine ganzrationale Funktion f die folgende Bedingungen erfüllt:
   a) Bei x = 1 hat der Graph von f eine waagerechte Tangente.
   b) Die Steigung des Graphen von f ist nie positiv.

5. Die Höhe einer wachsenden Pflanze wird näherungsweise beschrieben durch:
   $h(t) = -\frac{1}{20}(25 + 16t)e^{-0{,}64t} + 1{,}4 \qquad t \geq 0$
   Die Zeit t wird ab dem Einpflanzen in Monaten gemessen, die Höhe wird in Metern angegeben.
   a) Wie hoch war die Pflanze beim Einpflanzen?
   b) Zeigen Sie. dass für die Höhenzuwachsrate der Pflanze Folgendes gilt:
      $g(t) = 0{,}512 \cdot t \cdot e^{-0{,}64t}$
      Begründen Sie Ihr Vorgehen in Bezug auf den Sachzusammenhang.
   c) Begründen Sie kurz auf mathematischer Ebene: Die Höhe der Pflanze ist monoton zunehmend.
      Geben Sie die theoretische Maximalhöhe der Pflanze an. Begründen Sie Ihre Rechnung unter Zurückführung auf die Grenzwertregeln.
   d) Untersuchen Sie nach geeigneter Kurvendiskussion die Höhenzuwachsrate anhand folgender Kriterien:
      i) Für welchen Zeitpunkt ist die Höhenzuwachsrate extremal?
      ii) Handelt es sich um ein Maximum oder Minimum?
      iii) Wie hoch ist die extremale Höhenzuwachsrate? Welche absolute Höhe hat die Pflanze zu diesem Zeitpunkt?

6. Eine Firma macht mit der Produktion eines Heuschnupfensprays jedes Jahr einen Gewinn. Die Gewinnfunktion kann durch g beschrieben werden: $g(x) = -0{,}5x^3 + 2x^2 + 2{,}5x - 5 \qquad 0 \leq x \leq 4{,}5$
   Dabei gibt x die Produktionsmenge des Sprays in Tonnen an; der Gewinn wird in Millionen € angegeben.
   a) Berechnen Sie g(0), g(1) und g(4,5) und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.
   b) Bestimmen Sie die Menge an Heuschnupfensprays, bei der der Gewinn maximal ist. Wie hoch ist der maximale Gewinn? Die Ergebnisse sind jeweils auf zwei Dezimalen gerundet anzugeben. Begründen Sie auch, warum es sich um ein Maximum handelt.
   c) Skizzieren Sie den Graphen G_g unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse.