

## Übungen Mathematik - Exponentialfunktion und Wachstumsprozesse

---

### Aufgabe 1:

Erstelle für die folgenden Funktionen  $f$  eine Wertetabelle von  $x = -5$  bis  $x = 5$  und zeichne ihren Graphen.

a)  $f(x) = 0,8^x$     b)  $f(x) = 1,25^x$     c)  $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$     d)  $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$     e)  $f(x) = 1,5^x$     f)  $f(x) = 0,7^x$

### Aufgabe 2:

Gib die Wachstumsrate  $p\%$  oder den Wachstumsfaktor  $q$  an.

Wachstumsrate	$p\%$	15%	-7%	2,5%			
Wachstumsfaktor	$q$				1,05	0,80	0,97

### Aufgabe 3:

Der Schaum auf einem Glas Bier nimmt exponentiell ab.

Zeit (s)	0	10	20	30	40
Höhe (mm)	100	60	36	22	13

- Stelle die Abnahme graphisch dar.
- Mit welchem Faktor  $q$  erfolgt die Abnahme in je 10 s?
- Mit welchem Faktor  $a$  erfolgt die Abnahme in jeweils 1s?

### Aufgabe 4:

Für die Heilung von Schilddrüsenerkrankungen verwendet man radioaktives Jod 131 mit 8 Tagen Halbwertszeit. Mit welchem Faktor  $a$  zerfällt es pro Tag?

### Aufgabe 5:

Innerhalb von 7 Jahren hat sich in einem Waldgebiet die Anzahl der Kaninchen durch exponentielles Wachstum verdoppelt.

- Mit welchem Faktor erfolgt das Wachstum jährlich?
- Gib die jährliche Zunahme in Prozent an.

### Aufgabe 6:

Ein Kapital von 100000 Euro wuchs in 9 Jahren mit Zinseszins auf 150000 Euro.

- Mit welchem jährlichen Wachstumsfaktor erfolgte dies?
- Gib die jährliche Zunahme in Prozent an.

### Aufgabe 7:

Im Jahre 2000 lebten in Nigeria ca. 123 Millionen Menschen mit 2,8 % jährlichem Zuwachs. In wie vielen Jahren werden es erstmals mehr als 200 Millionen sein?

### Aufgabe 8:

Im Jahre 2000 lebten in Ungarn ca. 10 Millionen Menschen. Ungarn ist eines der wenigen Länder mit einer Abnahme seiner Bevölkerung, jährlich um 0,5 %. Wenn das so bleibt, in wie vielen Jahren werden es erstmals weniger als 9 Millionen sein?

### Aufgabe 9:

Im Jahre 1993 lebten in Mexiko etwa 90 Millionen Menschen, und diese Zahl nahm jährlich um ca. 1,8 % zu. Wie viele Einwohner wird Mexiko bei diesem Wachstum in 10 Jahren haben?

### Aufgabe 10:

In einem See nimmt die Helligkeit pro Meter Wassertiefe um 20 % ab. An der Oberfläche beträgt die Helligkeit 100 Einheiten. Wie viele Einheiten sind es in 7 m Wassertiefe?

#### Aufgabe 11:

Bei 0°C Außentemperatur nimmt die Temperatur des Tees in einer Thermoskanne stündlich um 12 % ab. Nach 5 Stunden werden in der Kanne 42°C gemessen. Wie heiß war der Tee beim Einfüllen?

#### Aufgabe 12:

Ein Kapital ist mit 6,5 % jährlichem Zinssatz in 40 Jahren mit Zins und Zinseszins auf 400000 Euro angewachsen. Wie hoch war das Anfangskapital?

#### Aufgabe 13:

Der Bestand an Kaninchen in einem Park wuchs in 15 Jahren exponentiell von 30 auf 110 Kaninchen.

- Wie groß ist der jährliche Wachstumsfaktor?
- Bestimme auch den Prozentsatz der jährlichen Zunahme.

#### Aufgabe 14:

1986 wurde beim Reaktorunfall in Tschernobyl unter anderem Strontium 90 mit 28,8 Jahren Halbwertszeit freigesetzt.

- Bestimme den jährlichen Zerfallsfaktor.
- Welcher Bruchteil der Anfangsmenge war 1996 und welcher ist heute noch vorhanden?

#### Aufgabe 15:

Ein radioaktives Präparat zerfällt so, dass seine Menge stündlich um 8,3 % abnimmt. Nach wie vielen ganzen Stunden ist erstmals weniger als 1 Zehntel der Anfangsmenge vorhanden?

#### Aufgabe 16:

Im Jahre 2000 lebten ca. 6,1 Milliarden Menschen auf der Erde bei einer jährlichen Zunahme um ca. 1,5 %. Nach wie vielen Jahren würde die Menschheit bei diesem Wachstum die 12-Milliarden-Grenze überschreiten?

#### Aufgabe 17:

Ein Wald enthält ungefähr 10000 m<sup>3</sup> Nutzholz. Durch Nachwachsen nimmt diese Holzmenge jährlich um 2,5 % zu. Wie viel m<sup>3</sup> Holz sind es bei diesem Wachstum in 12 Jahren?

#### Aufgabe 18:

Röntgenstrahlen werden durch Bleiplatten abgeschirmt. Pro mm Dicke der Bleiplatte nimmt die Strahlung um ca. 5 % ab. Auf welchen Bruchteil nimmt die Strahlung bei 10 mm Plattendicke ab?

#### Aufgabe 19:

Eine Algenkultur nimmt täglich um 30 % zu. Nach 5 Tagen sind es 300 kg Algen. Wie viele waren es anfangs?

#### Aufgabe 20:

Bei Petras Geburt vor 16 Jahren hat ihre Oma einen Geldbetrag zu 6,5 % jährlichem Zinssatz angelegt. Jetzt ist dieses Kapital auf 2191,21 Euro angewachsen. Wie viel Euro waren es anfangs?

Wie lange müsste man heute das Geld mit Zinseszins bei einem Zinssatz von 0,3% anlegen, um den gleichen Betrag zu erzielen?

#### Aufgabe 21:

Bei jeder Wäsche verliert eine Jeans 15 % ihrer Farbe. Nach wie vielen Waschvorgängen sind erstmals weniger als 20 % der ursprünglichen Farbe vorhanden?

#### Aufgabe 22:

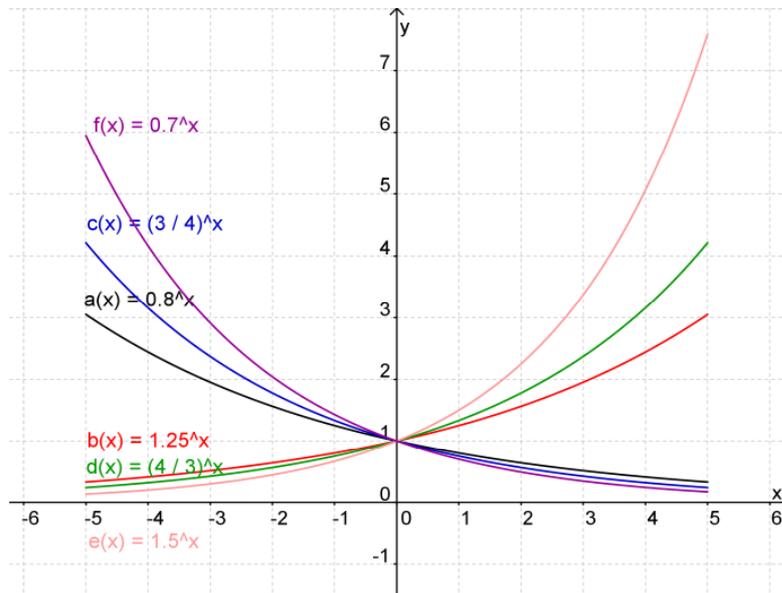
Jörg hat Glück und gewinnt 5000 Euro im Lotto. Dieses Geld legt er mit 7 % jährlichem Zinssatz an. Nach wie vielen Jahren ist dieses Kapital mit Zins und Zinseszins erstmals auf mehr als 8000 Euro angewachsen?

# Übungen Mathematik - Exponentialfunktion und Wachstumsprozesse - Lösungen

## Aufgabe 1:

Erstelle für die folgenden Funktionen f eine Wertetabelle von  $x = -5$  bis  $x = 5$  und zeichne ihren Graphen.

a)  $f(x) = 0,8^x$     b)  $f(x) = 1,25^x$     c)  $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$     d)  $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$     e)  $f(x) = 1,5^x$     f)  $f(x) = 0,7^x$



## Aufgabe 2:

Gib die Wachstumsrate p% oder den Wachstumsfaktor q an.

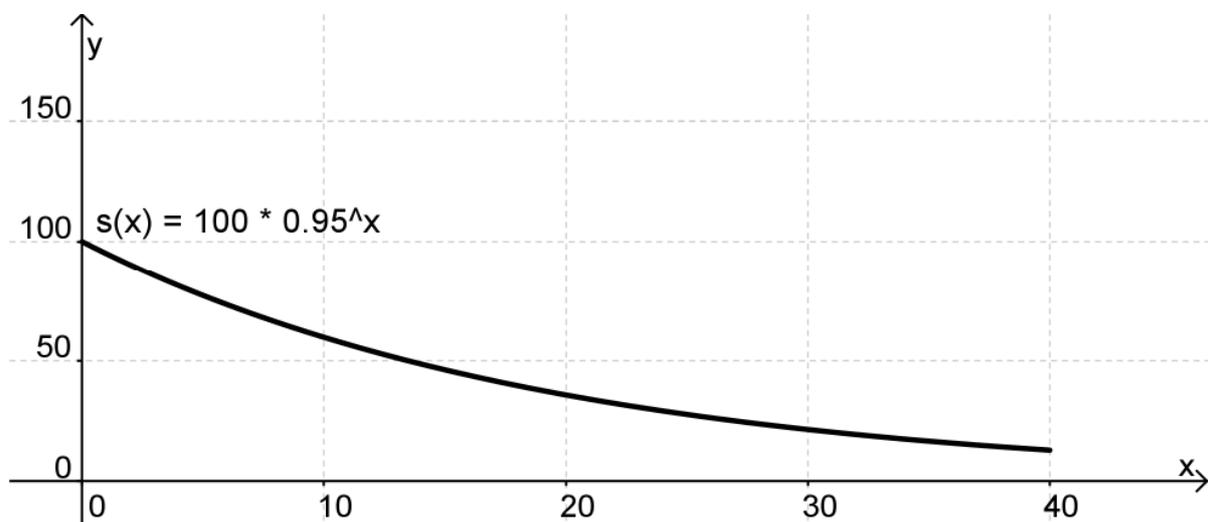
Wachstumsrate	p%	15%	-7%	2,5%	5%	-20%	-3%
Wachstumsfaktor	q	1,15	0,93	1,025	1,05	0,80	0,97

## Aufgabe 3:

Der Schaum auf einem Glas Bier nimmt exponentiell ab.

Zeit (s)	0	10	20	30	40
Höhe (mm)	100	60	36	22	13
q		0,6	0,6	0,61	0,591

a) Stelle die Abnahme graphisch dar.



b) Mit welchem Faktor q erfolgt die Abnahme in je 10 s?

$$q = 0,6$$

c) Mit welchem Faktor a erfolgt die Abnahme in jeweils 1s?

$$60 = 100 \cdot a^{10} \quad a = \sqrt[10]{0,6} \approx 0,95$$

#### Aufgabe 4:

Für die Heilung von Schilddrüsenerkrankungen verwendet man radioaktives Jod 131 mit 8 Tagen Halbwertszeit. Mit welchem Faktor  $a$  zerfällt es pro Tag?

$$f(x) = c \cdot a^x \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} = a^8 \quad \rightarrow \quad a = \sqrt[8]{0,5} \approx 0,917$$

#### Aufgabe 5:

Innerhalb von 7 Jahren hat sich in einem Waldgebiet die Anzahl der Kaninchen durch exponentielles Wachstum verdoppelt.

a) Mit welchem Faktor erfolgt das Wachstum jährlich?

$$f(x) = c \cdot a^x \quad \rightarrow \quad 2 = a^7 \quad \rightarrow \quad a = \sqrt[7]{2} \approx 1,1041$$

b) Gib die jährliche Zunahme in Prozent an.

Zunahme um 10,41%

#### Aufgabe 6:

Ein Kapital von 100.000 Euro wuchs in 9 Jahren mit Zinseszins auf 150.000 Euro.

a) Mit welchem jährlichen Wachstumsfaktor erfolgte dies?

$$K(x) = c \cdot a^x \quad \rightarrow \quad 150000 = 100000 \cdot a^9 \quad \rightarrow \quad a = \sqrt[9]{1,5} \approx 1,04608$$

b) Gib die jährliche Zunahme in Prozent an.

Zinsen  $z = 4,61\%$

#### Aufgabe 7:

Im Jahre 2000 lebten in Nigeria ca. 123 Millionen Menschen mit 2,8 % jährlichem Zuwachs. In wie vielen Jahren werden es erstmals mehr als 200 Millionen sein?

$$N(x) = c \cdot a^x \quad 200 \cdot 10^6 = 123 \cdot 10^6 \cdot 1,028^x \quad \frac{200}{123} = 1,028^x \quad x = \frac{\ln 200 - \ln 123}{\ln 1,028} = 17,6$$

In 18 Jahren werden es mehr als 200 Millionen Einwohner sein.

#### Aufgabe 8:

Im Jahre 2000 lebten in Ungarn ca. 10 Millionen Menschen. Ungarn ist eines der wenigen Länder mit einer Abnahme seiner Bevölkerung, jährlich um 0,5 %. Wenn das so bleibt, in wie vielen Jahren werden es erstmals weniger als 9 Millionen sein?

$$N(x) = c \cdot a^x \quad 9 \cdot 10^6 = 10 \cdot 10^6 \cdot 0,995^x \quad \frac{9}{10} = 0,995^x \quad x = \frac{\ln 9 - \ln 10}{\ln 0,995} = 21,02$$

In gut 21 Jahren werden es weniger als 9 Millionen Einwohner sein.

#### Aufgabe 9:

Im Jahre 1993 lebten in Mexiko etwa 90 Millionen Menschen, und diese Zahl nahm jährlich um ca. 1,8 % zu. Wie viele Einwohner wird Mexiko bei diesem Wachstum in 10 Jahren haben?

$$N(x) = c \cdot a^x \quad N(10) = 90 \cdot 10^6 \cdot 1,018^{10} \quad N(10) = 107577,2$$

In 10 Jahren wird Mexiko mehr als 107 Millionen Einwohner haben.

#### Aufgabe 10:

In einem See nimmt die Helligkeit pro Meter Wassertiefe um 20 % ab. An der Oberfläche beträgt die Helligkeit 100 Einheiten. Wie viele Einheiten sind es in 7 m Wassertiefe?

$$h(x) = c \cdot a^x \quad h(7) = 100 \cdot 0,8^7 \quad h(7) = 20,97$$

In 7 m Wassertiefe sind es noch knapp 21 Einheiten Helligkeit.

#### Aufgabe 11:

Bei 0°C Außentemperatur nimmt die Temperatur des Tees in einer Thermoskanne stündlich um 12 % ab. Nach 5 Stunden werden in der Kanne 42°C gemessen. Wie heiß war der Tee beim Einfüllen?

$$T(x) = c \cdot a^x \quad T(5) = 42 = c \cdot 0,88^5 \quad c = 79,6$$

Beim Einfüllen hatte der Tee eine Temperatur von ca. 80°C.

#### Aufgabe 12:

Ein Kapital ist mit 6,5 % jährlichem Zinssatz in 40 Jahren mit Zins und Zinseszins auf 400000 Euro angewachsen. Wie hoch war das Anfangskapital?

$$K(x) = c \cdot a^x \quad K(40) = 400000 = c \cdot 1,065^{40} \quad c = 32.216,30$$

Das Anfangskapital betrug vor 40 Jahren rund 32.000 €.

#### Aufgabe 13:

Der Bestand an Kaninchen in einem Park wuchs in 15 Jahren exponentiell von 30 auf 110 Kaninchen.

a) Wie groß ist der jährliche Wachstumsfaktor?

1,09

b) Bestimme auch den Prozentsatz der jährlichen Zunahme.

Zunahme um jährlich 9,05%.

#### Aufgabe 14:

1986 wurde beim Reaktorunfall in Tschernobyl unter anderem Strontium 90 mit 28,8 Jahren Halbwertszeit freigesetzt.

a) Bestimme den jährlichen Zerfallsfaktor.

$$\frac{1}{2} = a^{28,8} \quad a = \sqrt[28,8]{0,5} \approx 0,9762$$

b) Welcher Bruchteil der Anfangsmenge war 1996 und welcher ist heute noch vorhanden?

$$N(10) = 100 \cdot 0,9762^{10} \quad N(10) = 78,6$$

78,6 % der Anfangsmenge waren 1996 noch vorhanden und 2017 noch immer 47,4%.

#### Aufgabe 15:

Ein radioaktives Präparat zerfällt so, dass seine Menge stündlich um 8,3 % abnimmt. Nach wie vielen ganzen Stunden ist erstmals weniger als 1 Zehntel der Anfangsmenge vorhanden?

$$\frac{1}{10} = 0,917^x \quad x = \frac{\ln 1 - \ln 10}{\ln 0,917} = 26,574$$

Nach 27 Stunden ist erstmals weniger als 1 Zehntel der Ausgangsmenge vorhanden.

#### Aufgabe 16:

Im Jahre 2000 lebten ca. 6,1 Milliarden Menschen auf der Erde bei einer jährlichen Zunahme um ca. 1,5 %. Nach wie vielen Jahren würde die Menschheit bei diesem Wachstum die 12-Milliarden-Grenze überschreiten?

$$N(x) = c \cdot a^x \quad 12 \cdot 10^7 = 6,1 \cdot 10^7 \cdot 0,985^x \quad \frac{12}{6,1} = 1,015^x \quad x = \frac{\ln 12 - \ln 6,1}{\ln 1,015} = 45,445$$

Nach 46 Jahren werden es mehr als 12 Milliarden Menschen sein.

#### Aufgabe 17:

Ein Wald enthält ungefähr 10000 m<sup>3</sup> Nutzholz. Durch Nachwachsen nimmt diese Holzmenge jährlich um 2,5 % zu. Wie viel m<sup>3</sup> Holz sind es bei diesem Wachstum in 12 Jahren?

$$f(x) = c \cdot a^x \quad f(12) = 10000 \cdot 1,025^{12} \quad f(12) \approx 13\,448,9$$

Nach 12 Jahren enthält der Wald ungefähr 13400 m<sup>3</sup> Nutzholz.

#### Aufgabe 18:

Röntgenstrahlen werden durch Bleiplatten abgeschirmt. Pro mm Dicke der Bleiplatte nimmt die Strahlung um ca. 5 % ab. Auf welchen Bruchteil nimmt die Strahlung bei 10 mm Plattendicke ab?

$$f(x) = c \cdot a^x \quad f(10) = 100 \cdot 0,95^{10} \quad f(10) \approx 59,9$$

Hinter einer 10-mm-Platte beträgt die Strahlung noch ungefähr 60 %  $\left(\frac{4}{5}\right)$ .

#### Aufgabe 19:

Eine Algenkultur nimmt täglich um 30 % zu. Nach 5 Tagen sind es 300 kg Algen. Wie viele waren es anfangs?

$$f(x) = a \cdot 1,3^x \rightarrow f(5) = a \cdot 1,3^5 = 300 \rightarrow a = 80,8 \text{ kg}$$

#### Aufgabe 20:

Bei Petras Geburt vor 16 Jahren hat ihre Oma einen Geldbetrag zu 6,5 % jährlichem Zinssatz angelegt. Jetzt ist dieses Kapital auf 2191,21 Euro angewachsen. Wie viel Euro waren es anfangs?

$$K(x) = c \cdot a^x \quad K(16) = 2191,21 = c \cdot 1,065^{16} \quad c = 800,00$$

Das Anfangskapital betrug vor 16 Jahren 800 €.

Wie lange müsste man heute das Geld mit Zinseszins bei einem Zinssatz von 0,3% anlegen, um den gleichen Betrag zu erzielen?

$$K(x) = c \cdot a^x \quad 2191,21 = 800 \cdot 1,003^x \quad \frac{2191,21}{800} = 1,003^x \quad x = \frac{\ln 2191,21 - \ln 800}{\ln 1,003} = 336,4$$

Nach 337 Jahren würde man den gleichen Betrag rechnerisch erzielen, eine solche Anlage ist sinnlos.

#### Aufgabe 21:

Bei jeder Wäsche verliert eine Jeans 15 % ihrer Farbe. Nach wie vielen Waschvorgängen sind erstmals weniger als 20 % der ursprünglichen Farbe vorhanden?

$$F(x) = c \cdot a^x \quad 20 = 100 \cdot 0,85^x \quad 0,2 = 0,85^x \quad x = \frac{\ln 0,2}{\ln 0,85} = 9,9$$

Nach 10 Waschgängen sind erstmals weniger als 20% der ursprünglichen Farbe vorhanden.

#### Aufgabe 22:

Jörg hat Glück und gewinnt 5000 Euro im Lotto. Dieses Geld legt er mit 7 % jährlichem Zinssatz an. Nach wie vielen Jahren ist dieses Kapital mit Zins und Zinseszins erstmals auf mehr als 8000 Euro angewachsen?